

$T \subseteq \mathbb{R}$

21/10/19

Πεδίο: $\sqrt{T} = \{a \in \mathbb{R} : a^n \in T, n \in \mathbb{N}\}$

Πχ $\theta \delta \alpha \sqrt{12\mathbb{Z}} = 6\mathbb{Z}$

Έστω $x \in \sqrt{12\mathbb{Z}} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} x^n \in 12\mathbb{Z} \Rightarrow x^n = 12k, k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x^n = 2^2 \cdot 3 \cdot k$

$x = 2 \cdot 3(\cdot)$

$x = 6(\cdot) \Rightarrow x \in 6\mathbb{Z}$

Έστω $y \in 6\mathbb{Z}$ θδσ $y \in \sqrt{12\mathbb{Z}}$

$y = 6\lambda, \lambda \in \mathbb{Z}$

Παρατηρώ ότι $y^2 = 12(3\lambda^2) \in 12\mathbb{Z} \Rightarrow y \in \sqrt{12\mathbb{Z}}$

↓
2² · 3 (μοναδική στην πρωτογενή ανάλυση)

Ορισμός: Ένα ιδεώδες καλείται πεδίο αν $\sqrt{I} = I$

Αν K σώμα \rightarrow το K Π.Κ.Ι

Θεώρημα: Ο $K[x]$ είναι Π.Κ.Ι

Έστω $I \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$

και έστω $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ τ.ω.

$\langle f_1, f_s \rangle = I$

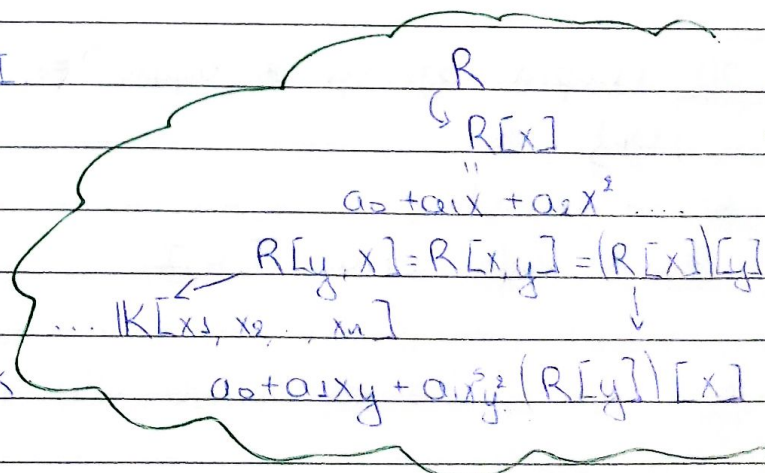
καλείται εωδ $\{f_1, \dots, f_s\}$

γρσ εωδ. των f_i

$\sum u_i f_i, u_i \in K$

γεννητόρων του I

και το $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ βάση του I



Πχ $I \subseteq K[x, y]$

$I = \langle x, y \rangle = \langle y, y-x, y^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + x^3 \rangle$

Θεώρημα βάσης Hilbert

Ορισμός: Ένας δακτύλιος R καλείται δακτύλιος της Noether αν κάθε ιδεώδες $I \subseteq R$ είναι πεπερασμένα παραχόμενο.

Θεώρημα: Αν ένας δακτύλιος R είναι Noetherian \Rightarrow και ο $R[x]$ είναι Noetherian (\Rightarrow γενικεύεται και στον $R[x_1, \dots, x_n]$)

Προβλήματα που θα επιλύσουμε: $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

① αν $I = \langle p_1, \dots, p_s \rangle \subseteq S$ και $\varphi \in S$

Πότε το $\varphi \in I$; (αν $\varphi \in I \Rightarrow$ να το γράψουμε σε ιδεώδ. των p_1, \dots, p_s)

② Εύρεση βάσης του S/I

③ $I, J \subseteq S$: περιγραφή των $I \cap J$, έλεγχος: πότε $I = J$;

④ Λοδέντος $\varphi \in S$ και $I \subseteq S$ έλεγχος: πότε $\varphi \in \sqrt{I}$;

⑤ $\sqrt{I} = \sqrt{J}$;

⑥ Τομή καμπυλών

⑦ Πότε 2 ιδεώδη αντιστοιχούν στην ίδια ποικιλότητα

Μονωνυμικές Διατάξεις

$$-2 < 1 < 2 < \sqrt{6} \quad \mathbb{K}$$

$$0 < x < x^2 < x^{2020} \quad \mathbb{K}[x]$$

$$xy < xy^2 \quad \mathbb{K}[x, y]$$

$$(xy^2, xy^3);$$

Ορισμός (μερική διάταξη)

Έστω σύνολο X . Μια σχέση $<$ στο X είναι σχέση μερικής διάταξης αν:

i) δεν ισχύει $a < a \quad \forall a \in X$

ii) αν $a < b$ και $b < \gamma \Rightarrow a < \gamma, \quad \forall a, b, \gamma \in X$

Π.Χ Η έννοια του υποσυνόλου είναι σχέση μερικής διάταξης.

Ορισμός (ολική διάταξη)

Μια μερική διάταξη $<$ καλείται ολική αν $\forall a, b \in X$ ισχύει ή $a = b$ ή $a < b$ ή $b < a$

Μονώνυμα είναι στοιχεία της μορφής $\{\lambda x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}, \quad a_i \in \mathbb{N}\}$
 $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$
 $\mathbb{T}^n = \lambda \in \mathbb{K}$

$\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$

$\rightarrow a = (3, 2, 0, 0)$

Π.Χ $\frac{1}{2} x_1^3 x_2^2, -\frac{1}{\sqrt{2}} x_1^3 x_4^2 \rightarrow a = (3, 0, 0, 2)$

Συμβολικός: Θα συμβολίζουμε με λx^a
όπου $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$.

Ορισμός: (Μονωνυμική διάταξη)

Στο σύνολο \mathbb{T}^n ορίζουμε μονωνυμική διάταξη μια ολική διάταξη

i) $1 < x^a, \quad \forall x^a \in \mathbb{T}^n$

ii) αν $x^a, x^b \in \mathbb{T}^n$, με $x^a < x^b \Rightarrow x^a x^\delta < x^b x^\delta, \quad \forall x^\delta \in \mathbb{T}^n$

Πρόταση Έστω \leq μονων. διάταξη με $x^a, x^b \in \mathbb{T}^n$
Αν $x^a \mid x^b \Rightarrow x^a \leq x^b$

① Λεξικογραφική Διάταξη $<_{lex}$

Ορισμός: Έστω $x^a, x^b \in \mathbb{T}^n$ ($a = (a_1, \dots, a_n), b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{N}^n$)

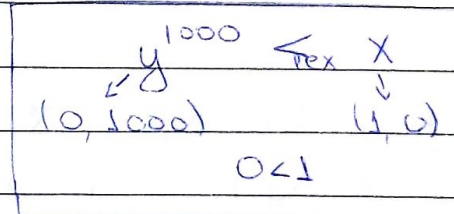
Ορίζουμε $x^a <_{lex} x^b \Leftrightarrow$ για τις πρώτες διαδοχικές ανισότητες των a, b
από τα αριστερά ισχύει $a_i < b_i$

Έστω $K[x_1, \dots, x_n]$ με $x_1 > x_2 > \dots > x_n$

πχ ① $K[x, y]$ με $x > y$, ω^a , $a \in \mathbb{N}^2$
 (δυνάμεις των x, y)

$$1 \preceq_{lex} y \preceq_{lex} y^2 \preceq_{lex} x \preceq_{lex} xy \preceq_{lex} xy^2$$

$$\preceq_{lex} x^2 \preceq_{lex} x^2 y \preceq_{lex} x^2 y^2$$



② $K[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ Έστω $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$

$$x_2^2, x_1^3 x_2^5, \frac{1}{2} x_4 x_5^2, 6x_3 x_4^2, -x_1^3 x_3^2 x_4, x_3^{100} x_5^{1000}$$

$a = (0, 1, 0, 0, 0)$, $a = (3, 5, 0, 0, 0)$, $a = (0, 0, 1, 2, 0)$, $a = (0, 0, 1, 2, 0)$, $a = (3, 0, 2, 1, 0)$, $a = (0, 0, 100, 0, 1000)$

(Για να βρω το πιο μεγάλο, κοιτάω τα πιο πολλά x_1)

$$x_1^3 x_2^5 \succ_{lex} -x_1^3 x_3^2 x_4 \succ_{lex} x_2^2 \succ_{lex} x_3^{100} x_5^{1000} \succ_{lex} 6x_3 x_4^2 \succ_{lex} \frac{1}{2} x_4 x_5^2$$

Έστω $x_4 > x_5 > x_2 > x_1 > x_3$

$$6x_3 x_4^2 \succ_{lex} \frac{1}{2} x_4 x_5^2 \succ_{lex} -x_1^3 x_3^2 x_4 \succ_{lex} x_3^{100} x_5^{1000} \succ_{lex} x_1^3 x_2^5 \succ_{lex} x_2^2$$

Θεώρημα Η διάταξη \preceq_{lex} είναι μονωνομική T^n

Απόδειξη: αρχικά ∂ δο είναι ολική διάταξη $\left\{ \begin{array}{l} \textcircled{a} \text{ η } \preceq_{lex} \text{ είναι κερική} \\ \textcircled{b} \text{ ολική (όλα συγκρίσιμα)} \end{array} \right.$

① Προφανώς, δεν ισχύει $x^a \preceq_{lex} x^a$, $\forall x^a \in T^n$

$(a - a = 0)$ (όλες οι δυνάμεις ίσες με όλες)

Έστω $x^a, x^b, x^c \in T^n$ με $x^a \preceq_{lex} x^b$ και $x^b \preceq_{lex} x^c$ ∂ δο $x^a \preceq_{lex} x^c$

$\rightarrow x^a \preceq_{lex} x^b$ άρα $a_i < b_i$ και $a_\lambda = b_\lambda \quad \forall \lambda = 1, \dots, i-1$ *

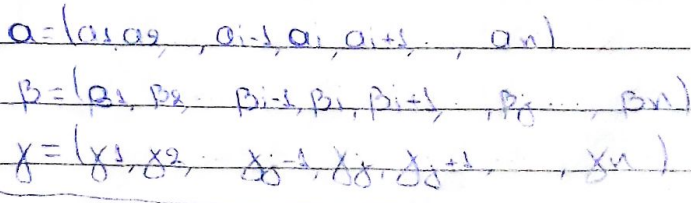
$\rightarrow x^b \preceq_{lex} x^c$ άρα $b_j < c_j$ και $b_k = c_k, \quad \forall k = 1, \dots, j-1$

Διακρίνω περιπτώσεις

$$i) \quad i = j \xrightarrow{\text{υπόβ}} a_i < b_i = b_j < c_j = c_i$$

$$\text{και } a_\lambda = b_\lambda = c_\lambda, \quad \forall \lambda = 1, \dots, i-1$$

$$\Leftrightarrow x^a \preceq_{lex} x^c$$



ii) $i > j \Rightarrow a_j = b_j < \gamma_j$ και $a_k = b_k = \gamma_k, \forall k=1, \dots, j-1$
 $\Rightarrow X^a \leq_{\text{lex}} X^b$

iii) $i < j$ Δουκά ομοίως.

Ολική διάταξη: Έστω $X^a, X^b \in \mathbb{T}^n$

\Rightarrow Προφανώς ή $X^a = X^b$ ή $X^a >_{\text{lex}} X^b$ ή $X^a <_{\text{lex}} X^b$

Παρατήρηση ∇ Κοιτάμε τα διανύσματα a, b

Μονωνυμική διάταξη

- Προφανώς $1 < X^a, \forall X^a \in \mathbb{T}^n$
 $a \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n \Rightarrow \exists$ τουλάχιστον μια συνιστώσα $a_i \neq 0$
 χρχ επιλέξω το μικρότερο i τ.ω. $a_i \neq 0$
 \Rightarrow για αυτή τη συνιστώσα έπεται $X^a >_{\text{lex}} 1$
 (άρα, όλες οι άλλες μικροί. = 0)

• Έστω $X^a, X^b, X^c \in \mathbb{T}^n$ με $X^a <_{\text{lex}} X^b \stackrel{\text{op}}{\Leftrightarrow} a_i < b_i$ και $a_k = b_k, \forall k=1, \dots, i-1$
 Θδο $X^a X^c <_{\text{lex}} X^b X^c$

$a_i + \gamma_i < b_i + \gamma_i$ και $a_k + \gamma_k = b_k + \gamma_k, \forall k=1, \dots, i-1$
 $\Rightarrow X^a X^c <_{\text{lex}} X^b X^c$

• Η βαθμωτή λεξικογραφική διάταξη $<_{\text{deglex}}$

Έστω $K[x_1, \dots, x_n]$ με $x_1 > \dots > x_n$

Ορισμός: Ορίζουμε στον \mathbb{T}^n την βαθμωτή λεξικογραφική διάταξη

για X^a, X^b ($a=(a_1, \dots, a_n)$ ($b=(b_1, \dots, b_n)$) $\in \mathbb{N}^n$)

$X^a <_{\text{deglex}} X^b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i < \sum_{i=1}^n b_i$ (βαθμοί)

Αν $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i \Rightarrow X^a <_{\text{lex}} X^b$

IX

$K[x, y]$

ne $x > y$

radikal 2

radikal 3

$\downarrow \deglex y < \deglex x < \deglex y^2 < \deglex xy < \deglex x^2 < \deglex y^3 < \deglex y^2x < \deglex x^2y < \deglex x^3$
 $< \deglex \dots$