$I \leq R$ 21/10/19

Ριζικό: $\sqrt{I} = \{ a \in R : a^n \in I, n \in \mathbb{N} \}$

Πχ ΘΔΟ $\sqrt{12\mathbb{Z}} = 6\mathbb{Z}$

Έστω $x \in \sqrt{12\mathbb{Z}} \Rightarrow \exists\, n \in \mathbb{N}$ $x^n \in 12\mathbb{Z} \Rightarrow x^n = 12k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x^n = 2^2 \cdot 3k$ $\quad 12 \to 2^2 \cdot 3$ (αναλύω στην πρωτογενή ανάλυση)

$x = 2 \cdot 3 (\;;\;)$

$x = 6(\;) \Rightarrow x \in 6\mathbb{Z}$

Έστω $y \in 6\mathbb{Z}$ ΘΔΟ $y \in \sqrt{12\mathbb{Z}}$

$\Updownarrow$

$y = 6\lambda$, $\lambda \in \mathbb{Z}$

$\Updownarrow$

παρατηρώ ότι $y^2 = 12(3\lambda^2) \in 12\mathbb{Z} \Rightarrow y \in \sqrt{12\mathbb{Z}}$

Ορισμός: Ένα ιδεώδες καλείται ριζικό αν $\sqrt{I} = I$

Αν $\mathbb{K}$ σώμα $\to$ το $\mathbb{K}$ Π.Κ.Ι

Θεώρημα: Ο $\mathbb{K}[x]$ είναι Π.Κ.Ι

Έστω $I \leq \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$

και έστω $< f_1, \ldots, f_s >$ τ.ω.

$<f_1, \ldots, f_s> = I$ γραμμ. συνδ. των f_i

$\sum u_i f_i$, $u_i \in \mathbb{K}$

καλείται σύνολο $\{f_1, \ldots, f_s\}$ γεννητόρων του I

και το $<f_1, \ldots, f_s>$ βάση του I

R

$R[x]$

$\shortparallel$

$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \ldots$

$R[y, x] = R[x, y] = (R[x])[y]$

$\ldots \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$

$a_0 + a_1 xy + a_2 x y^2 \; (R[y])[x]$

Πχ $I \leq \mathbb{R}[x, y]$

$I = <x, y> = <y, y - x, y^{2020} - \frac{1}{\sqrt{2}} x^{2018} + x^3>$

Θεώρημα βάσης Hilbert

Ορισμός. Ένας δακτύλιος R καλείται δακτύλιος της Noether αν κάθε ιδεώδες $I \le R$ είναι πεπερασμένα παραγόμενο.

Θεώρημα. Αν ένας δακτύλιος R είναι Noetherian $\Rightarrow$ και ο $R[x]$ είναι Noetherian ($\Rightarrow$ γενικεύεται και στον $R[x_1, \dots, x_n]$)

Προβλήματα που θα επιλύσουμε: $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$

1. αν $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \le S$ και $\varphi \in S$
   Πότε το $\varphi \in I$; (αν $\varphi \in I \Rightarrow$ να το γράψουμε σε σωδ. των $f_1, \dots, f_s$)

2. Εύρεση βάσης του S/I

3. $I, J \le S$: περιγραφή των $I \cap J$, έλεγχος: πότε $I = J$;

4. Δοθέντος $\varphi \in S$ και $I \le S$ έλεγχος: πότε $\varphi \in \sqrt{I}$;

5. $\sqrt{I} = \sqrt{J}$;

6. Τομή καμπυλών

7. Πότε 2 ιδεώδη αντιστοιχούν στην ίδια ποικιλότητα

Μονωνυμικές Διατάξεις

$-2 < 1 < 2 < \sqrt{6}$ $\quad \mathbb{K}$

$0 < x < x^2 < x^{2020}$ $\quad \mathbb{K}[x]$

$xy < x y^{2017}$ $\quad \mathbb{K}[x,y]$

$x^9y^2, \; xy^3$;

Ορισμός (μερική διάταξη)
Έστω σύνολο X. Μια σχέση $<$ στο X είναι σχέση μερικής διάταξης αν:
i) δεν ισχύει $a < a$ $\forall a \in X$
ii) αν $a < \beta$ και $\beta < \gamma \Rightarrow a < \gamma$, $\forall a, \beta, \gamma \in X$

Πχ Η έννοια του υποσυνόλου είναι σχέση μερικής διάταξης.

Ορισμός (ολική διάταξη)
Μια μερική διάταξη $<$ καλείται ολική αν
$\forall a, \beta \in X$ ισχύει ή $a = \beta$ ή $a < \beta$ ή $\beta < a$

Μονώνυμα είναι στοιχεία της μορφής $\{\lambda x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n},\ a_i \in \mathbb{N}\}$
$\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ $\qquad \mathbb{T}^n = \qquad \lambda \in \mathbb{K}$

$\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3, x_4]$
$\to a = (3, 2, 0, 0)$
Πχ $\frac{1}{2} x_1^3 x_2^2$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} x_1^3 x_4^2 \to a = (3, 0, 0, 2)$

Συμβολισμός: Θα συμβολίζουμε με λx^a
όπου $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$.

Ορισμός: (μονωνυμική διάταξη)
Στο σύνολο $\mathbb{T}^n$ ορίζουμε μονωνυμική διάταξη μια ολική διάταξη
i) $1 < x^a$, $\forall x^a_{\neq 1} \in \mathbb{T}^n$
ii) αν $x^a, x^\beta \in \mathbb{T}^n$, με $x^a < x^\beta \Rightarrow x^a x^\gamma < x^\beta x^\gamma$, $\forall x^\gamma \in \mathbb{T}^n$

Πρόταση Έστω $\leq$ μονων. διάταξη με $x^a, x^\beta \in \mathbb{T}^n$
Αν $x^a \mid x^\beta \Rightarrow x^a \leq x^\beta$

① **Λεξικογραφική Διάταξη** $<_{lex}$
Ορισμός: Έστω $x^a, x^\beta \in \mathbb{T}^n$ ($a = (a_1, \dots, a_n), \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$)
Ορίζουμε $x^a <_{lex} x^\beta \Leftrightarrow$ για τις πρώτες διαφορετικές συνιστώσες των a, β από τα αριστερά ισχύει $a_i < \beta_i$

Έστω $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ με $x_1 > x_2 > \ldots > x_n$

Πχ ① $\mathbb{K}[x,y]$ με $x>y$, ω^a, $a \in \mathbb{N}^2$
(δυνάμεις των x, y)

$1 \leq_{lex} y \leq_{lex} y^2 \ldots \leq_{lex} x \leq_{lex} xy \leq_{lex} xy^2 \ldots$
$\leq_{lex} x^2 \leq_{lex} x^2 y \leq_{lex} x^2 y^2 \ldots$

$y^{1000} \leq_{lex} x$ $(0,1000)$ $(1,0)$ $0<1$

② $\mathbb{K}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ Έστω $x_1 > x_2 > x_3 > x_4 > x_5$

x_2^2 , $x_1^3 x_2^5$, $\frac{1}{2} x_4 x_5^2$, $6 x_3 x_4^2$, $-x_1^3 x_3^2 x_4$, $x_3^{100} x_5^{1000}$

$a=(0,1,0,0,0)$ $a=(3,5,0,0,0)$ $a=(0,0,0,1,2)$ $a=(0,0,1,2,0)$ $a=(3,0,2,1,0)$ $a=(0,0,100,0,1000)$

(Για να βρω το πιο μεγάλο, κοιτάω τα πιο πολλά x_1)

$x_1^3 x_2^5 >_{lex} -x_1^3 x_3^2 x_4 >_{lex} x_2^2 >_{lex} x_3^{100} x_5^{1000} >_{lex} 6 x_3 x_4^2 >_{lex} \frac{1}{2} x_4 x_5^2$

Έστω $x_4 > x_5 > x_2 > x_1 > x_3$

$6 x_3 x_4^2 >_{lex} \frac{1}{2} x_4 x_5^2 >_{lex} -x_1^3 x_3^2 x_4 >_{lex} x_3^{100} x_5^{1000} >_{lex} x_1^3 x_2^5 >_{lex} x_2^2$

Θεώρημα Η διάταξη $\leq_{lex}$ είναι μονωνυμική $\mathbb{T}^n$

Απόδειξη αρχικά δδο είναι ολική διάταξη ⟨ ⓐ η $\leq_{lex}$ είναι μερική
ⓑ ολική (όλα συγκρίσιμα)

ⓐ Προφανώς, δεν ισχύει $x^a <_{lex} x^a$, $\forall x^a \in \mathbb{T}^n$
$(a-a=0$ (όλες οι συνιστώσες ίσες με όλες)

Έστω $x^a, x^\beta, x^\gamma \in \mathbb{T}^n$ με $x^a <_{lex} x^\beta$ και $x^\beta <_{lex} x^\gamma$ δδο $x^a <_{lex} x^\gamma$

→ $x^a <_{lex} x^\beta$ άρα $a_i < \beta_i$ και $a_\lambda = \beta_\lambda$ $\forall \lambda = 1, \ldots, i-1$ (*)

→ $x^\beta <_{lex} x^\gamma$ άρα $\beta_j < \gamma_j$ και $\beta_k = \gamma_k$, $\forall k = 1, \ldots, j-1$

Διακρίνω περιπτώσεις

$a = (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$
$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_j, \ldots, \beta_n)$
$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{j-1}, \gamma_j, \gamma_{j+1}, \ldots, \gamma_n)$

i) $i = j \overset{υπο}{\Longrightarrow} a_i < \beta_i = \beta_j < \gamma_j = \gamma_i$
και $a_{\lambda'} = \beta_{\lambda'} = \gamma_{\lambda'}$, $\forall \lambda' = 1, \ldots, i-1 = j-1$
$\overset{op}{\Longleftrightarrow} x^a <_{lex} x^\gamma$

ii) $i > j \Rightarrow \alpha_j = \beta_j < \gamma_j$ και $\alpha_{k'} = \beta_{k'} = \gamma_{k'}$, $\forall k' = 1, \dots, j-1$
$x^\beta <_{lex} x^\gamma$ (*)

$\Rightarrow x^\alpha <_{lex} x^\gamma$

iii) $i < j$ Δυικά ομοίως.

Ολική διάταξη: Έστω $x^\alpha, x^\beta \in \mathbb{T}^n$
$\Rightarrow$ Προφανώς ή $x^\alpha = x^\beta$ ή $x^\alpha >_{lex} x^\beta$ ή $x^\alpha <_{lex} x^\beta$

Παρατήρηση: Κοιτάμε τα διανύσματα α, β.

Μονωνυμική διάταξη
- Προφανώς $1 < x^\alpha$, $\forall x^\alpha \neq 1 \in \mathbb{T}^n$
$\Updownarrow$
$\alpha \neq (0, \dots, 0) \in \mathbb{N}^n \Rightarrow \exists$ τουλ. μια συνιστώσα $\alpha_i \neq 0$
χβγ επιλέγω το μικρότερο i τ.ω. $\alpha_i \neq 0$
$\Rightarrow$ για αυτή τη συνιστώσα έπεται $x^\alpha >_{lex} 1$
(άρα όλες οι άλλες μικρότ. $= 0$)

- Έστω $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma \in \mathbb{T}^n$ με $x^\alpha <_{lex} x^\beta \overset{op}{\Leftrightarrow} \alpha_i < \beta_i$ και $\alpha_k = \beta_k$, $\forall k = 1, \dots, i-1$
Θδο $x^\alpha x^\gamma <_{lex} x^\beta x^\gamma$
$\alpha_i + \gamma_i < \beta_i + \gamma_i$ και $\alpha_k + \gamma_k = \beta_k + \gamma_k$ $\forall k = 1, \dots, i-1$
$\Rightarrow x^\alpha x^\gamma < x^\beta x^\gamma$

- Η βαθμωτή λεξικογραφική διάταξη $<_{deglex}$

Έστω $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ με $x_1 > \dots > x_n$
Ορισμός: Ορίζουμε στον $\mathbb{T}^n$ την βαθμωτή λεξικογραφική διάταξη
για x^α, x^β $((\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)), (\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)) \in \mathbb{N}^n)$
$x^\alpha <_{deglex} x^\beta \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i < \sum_{i=1}^{n} \beta_i$ (βαθμοί)
Αν $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \Rightarrow x^\alpha <_{lex} x^\beta$

$\underline{\text{πχ}}$ $\mathbb{K}[x,y]$ με $x > y$

$$1 <_{deglex} y <_{deglex} x <_{deglex} \underbrace{y^2 <_{deglex} xy <_{deglex} x^2}_{\text{βαθμού } 2} <_{deglex} \underbrace{y^3 <_{deglex} y^2x <_{deglex} x^2y <_{deglex} x^3}_{\text{βαθμού } 3}$$

$<_{deglex} \dots$